Сочиненія Гельмгольца.

№ 1.

О ПРОИСХОЖДЕНІИ

и

ЗНАЧЕНІИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ АКСІОМЪ.

Изданіе журнала „Научное Обозрѣніе".

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Паровая Скоропечатня А. Пороховщикова, Гороховая ул, д. № 12.
1895.

Т. Рибо. Современная германская психологія. Ц. 1 р. 50 к

Проф. Генрихъ Гойеръ. Мозгъ и мысль (съ рис.). Ц. 1 р.

Пастеръ. Винная кислота (введеніе въ стереохимію). Ц. 30 к.

Вальтеръ Эльсъ. Опыты по физіологіи растеній. Ц. 50 коп.

Спенсеръ. Недостаточность естественнаго подбора. Изд. 2-е. Ц. 40 к.

Вейсманнъ и Спенсеръ. Естеств. подборъ. Ц. 30 к.

Дарвинъ. Инстинктъ. Ц. 30 к.

Герцъ. Электрическая сила. Ц. 40 к.

Микроскопъ и телескопъ. Ц. 40 к. Изд. 2-ое.

Броккъ и Жаке. Кожныя болѣзни. Ц. 50 к.

Цѣны безъ пересылки. Подписчики „Научн. Обозр." при обращеніи *въ редакцію,* за пересылку не платятъ.

„НАУЧНОЕ ОБОЗРѢНІЕ"

ПОДПИСКА на 1895 г. ПРОДОЛЖАЕТСЯ.

На годъ **семь** р., полгода **четыре** р.

Приложенія на 1895 г.: 1) Астрономич. календарь (вмѣсто Уэбба). 2) Рибо. Психологія. 3) Проф. Гойеръ. Мозгъ и Мысль. 4—5) Ч. Дарвинъ. Происхожденіе видовъ (3 выпуска). 6) Происхожденіе человѣка ч. I. Подписчики на 2-ое полугодіе получатъ №№ 4—6 Приложеній.

Новый адресъ редакціи и главной конторы: СПБ. Надеждинская ул. д. 43 (Благосвѣтлова), кв. 15, входъ съ Манежнаго пер.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ 23 Сентября 1895 г





О происхожденіи и значеніи геометрическихъ аксіомъ.

I.

Фактъ существованія науки такого рода и построенной такимъ образомъ, какъ геометрія, издавна долженъ былъ въ высшей степени обращать на себя вниманіе всѣхъ тѣхъ, кого интересовали основные вопросы теоріи познанія. Изъ всѣхъ отраслей человѣческаго знанія нѣтъ ни одной, которая представлялась бы, подобно геометріи, вышедшею на свѣтъ, какъ покрытая латами Минерва изъ головы Зевса; ни одной, передъ чьей сокрушительной эгидой сомнѣніе и противорѣчіе не осмѣливалось въ такой степени раскрыть глаза. При этомъ на долю геометріи не выпадаетъ трудной и скучной задачи собирать факты опыта,—чѣмъ приходится заниматься естествознанію въ узкомъ смыслѣ слова; но исключительною формою ея научныхъ пріемовъ является дедукція. Одинъ выводъ развивается изъ другого, и все-таки,

въ концѣ концовъ, ни одинъ здравомыслящій человѣкъ не сомнѣвается въ томъ, что эти геометрическія предложенія должны встрѣтить весьма практическое примѣненіе къ окружающей насъ дѣйствительности.

Землемѣріе и архитектура, машиностроеніе и математическая физика постоянно вычисляютъ различнѣйшія пространственныя отношенія по геометрическимъ предложеніямъ, ожидая, что успѣхъ ихъ построеній и опытовъ будетъ сообразоваться съ этими вычисленіями; и еще неизвѣстно ни одного примѣра, гдѣ бы это ожиданіе оказалось обманутымъ, предполагая, что вычисленіе было правильно и основывалось на достаточныхъ данныхъ.

На самомъ дѣлѣ, тотъ фактъ, что геометрія существуетъ и достигаетъ такихъ результатовъ, всегда выставлялся на видъ въ спорѣ по вопросу, составляющему въ то же время ядро всѣхъ противорѣчій между философскими системами; фактомъ этимъ пользовались, чтобы доказать на внушительномъ примѣрѣ, что возможно познаніе предложеній, обладающихъ реальнымъ содержаніемъ, безъ соотвѣтственной взятой изъ опыта основы. Въ особенности при отвѣтѣ на знаменитый вопросъ Канта: „Какимъ образомъ возможны апріорныя синтетическія предложенія?“ [1]), геометрическія аксіомы являются именно тѣми примѣрами, ко-

[1]) Satz мы переводимъ вездѣ словомъ предложеніе, а не сужденіе.

торые, повидимому, доказываютъ всего нагляднѣе, что вообще возможны синтетическія предложенія *a priori*. Далѣе, для Канта, то обстоятельство, что такія предложенія существуютъ и навязываются нашему убѣжденію необходимымъ образомъ, служитъ доказательствомъ того, что пространство есть *a priori* данная форма всякаго внѣшняго созерцанія [1]). Поэтому, Кантъ, повидимому, предоставляетъ въ пользу этой апріорно данной формы, не только характеръ чисто формальной и пустой по содержанію схемы, въ которую могло бы войти любое содержаніе, взятое изъ опыта; но эта схема оказывается обладающею, вмѣстѣ съ тѣмъ, извѣстными особенностями, которыя приводятъ къ тому, что въ нее можетъ вступить и стать доступнымъ нашему созерцанію лишь извѣстнымъ образомъ и по извѣстному закону ограниченное содержаніе [2]).

[1]) Anschauung мы переводимъ созерцаніе (интуиція), а не „воззрѣніе“. *Перев.*

[2]) Въ своей книгѣ „О границахъ философіи“ В. Тобіасъ утверждаетъ, что предложенія подобнаго же рода, высказанныя мною раньше, оказались будто бы непониманіемъ мнѣнія Канта. Но Кантъ спеціально приводитъ предложенія, что *прямая линія есть кратчайшая*, что пространство имѣетъ три измѣренія и что *между двумя точками возможна лишь одна прямая*, какъ такія, которыя „выражаютъ условія чувственнаго созерцанія *a priori*“. Даны ли эти предложенія первично въ пространственномъ созерцаніи, или же это послѣднее даетъ лишь точки опоры, изъ которыхъ разсудокъ можетъ развить такія предложенія *a priori*, чему придаетъ значеніе мой критикъ, объ этомъ здѣсь вовсе не идетъ рѣчь.

Именно этотъ интересъ, представляемый геометріей для теоріи познанія, придаетъ мнѣ духу говорить о геометрическихъ предметахъ, обращаясь къ тѣмъ, кто проникъ въ математическіе вопросы лишь немного глубже, чѣмъ сколько вынесъ изъ школьнаго знанія. По счастью даже то, чему обыкновенно обучаютъ въ гимназіяхъ, окажется, я думаю, достаточнымъ, чтобы сдѣлать для васъ понятнымъ, по крайней мѣрѣ, смыслъ предложеній, о которыхъ будетъ рѣчь далѣе. Я намѣренъ, именно, сообщить вамъ о рядѣ примыкающихъ другъ къ другу новыхъ математическихъ работъ, касающихся геометрическихъ аксіомъ, ихъ отношеній къ опыту и логической возможности замѣнить ихъ другими аксіомами.

Относящіяся сюда оригинальныя работы математиковъ, предназначенныя прежде всего дать доказательства для спеціалистовъ и требующія болѣе высокой силы абстракціи, чѣмъ почти любые другіе выводы,—почти недоступны для не-математиковъ. Поэтому я попытаюсь сдѣлать и для этихъ послѣднихъ понятнымъ, о чемъ здѣсь идетъ рѣчь. Едва-ли стоитъ сдѣлать замѣчаніе, что мое изложеніе не дастъ доказательства справедливости новыхъ взглядовъ. Кто ищетъ доказательства, долженъ дать себѣ трудъ изучить оригинальныя работы.

Кто только переступилъ черезъ порогъ первыхъ предложеній элементарной геометріи, т. е. математическаго ученія о пространствѣ, тотъ

уже находитъ передъ собою тѣ, свободныя отъ пробѣловъ, цѣпи выводовъ, о которыхъ я упоминалъ раньше, и посредствомъ которыхъ все болѣе разнообразныя и сложныя пространственныя формы подчиняются своимъ законамъ. Но въ этихъ же первыхъ основаніяхъ геометріи выставляются нѣкоторыя предложенія, относительно которыхъ сама геометрія заявляетъ, что не можетъ ихъ доказать, и что она разсчитываетъ на иное, — а именно, что каждый, кто пойметъ смыслъ этихъ предложеній, будетъ вынужденъ признать ихъ правильность. Это такъ наз. аксіомы геометріи. Сюда принадлежитъ, прежде всего, предложеніе, что, если мы назовемъ кратчайшую линію, которая только можетъ быть проведена между двумя точками, *прямою* линіей, то между двумя точками возможна только одна такая прямая линія, а не двѣ, различныя между собою. Далѣе, оказывается аксіомой, что чрезъ любыя три точки пространства, не лежащія на одной прямой линіи, можетъ быть проведена одна плоскость, т. е. поверхность, на которую упадаетъ всѣми своими точками любая прямая, соединяющая двѣ точки на этой плоскости. Еще одна аксіома, служившая предметомъ многочисленныхъ разсужденій, гласитъ, что чрезъ точку, лежащую внѣ прямой, можно провести лишь одну параллельную къ данной прямую, а не двѣ различныя параллельныя. Параллельными при этомъ называютъ двѣ прямыя линіи, лежащія

на одной и той же плоскости и никогда не пересѣкающіяся между собою, сколько бы мы ихъ ни продолжали. Кромѣ того, есть геометрическія аксіомы, содержащія предложенія о числѣ измѣреній, какъ пространства, такъ и его поверхностей, линій, точекъ и выясняющія понятіе о непрерывности этихъ формъ; таковы предложенія, что граница тѣла есть поверхность, поверхности—линія, линіи—точка и что точка недѣлима; и предложенія, что движеніе точки даетъ линію, движеніе линіи—линію [1]) или поверхность, движеніе поверхности даетъ поверхность или же тѣло, но движеніе тѣла даетъ всегда также тѣло. Откуда же появляются всѣ такія предложенія, недоказуемыя и однако несомнѣнно справедливыя, — и это въ наукѣ, гдѣ все остальное подчинено господству вывода? Являются-ли эти предложенія наслѣдіемъ отъ божественнаго источника нашего разума, какъ полагаютъ философы идеалисты, или же просто остроуміе всѣхъ предыдущихъ поколѣній математиковъ оказалось пока недостаточнымъ, чтобы найти доказательство? Всякій новичокъ въ геометріи, бодро приступающій къ этой наукѣ, естественно старается стать тѣмъ счастливцемъ, который посрамитъ всѣхъ предшественниковъ. Очень хорошо, что каждый берется съизнова за задачу; потому что

[1]) Если напр. прямая движется по своему собственному направленію, то она описываетъ не какую либо поверхность, а саму себя. *Перев.*

только безплодность собственныхъ попытокъ могла, при прежнемъ состояніи вопроса, убѣдить каждаго въ невозможности дать доказательство. Къ сожалѣнію, постоянно появляются вновь отдѣльные труженики, которые такъ долго и такъ сильно запутываются въ сложныхъ выводахъ, что, наконецъ, оказываются неспособными болѣе открыть ошибку и воображаютъ, что рѣшили задачу. Въ особенности, предложеніе о параллельныхъ линіяхъ вызвало значительное число призрачныхъ доказательствъ.

Величайшая трудность въ этихъ изслѣдованіяхъ состояла и состоитъ всегда въ томъ, что къ логическому развитію понятій слишкомъ легко примѣшивались результаты обыденнаго опыта, въ роли призрачныхъ необходимыхъ законовъ мысли (Denknothwendigkeiten)—и это продолжалось до тѣхъ поръ, пока единственнымъ методомъ геометріи былъ преподанный Евклидомъ методъ созерцанія. Въ особенности чрезвычайно трудно, подвигаясь по этому пути, сдѣлать для себя всюду яснымъ, не прибѣгаемъ ли мы, невольно и безсознательно, въ тѣхъ шагахъ, которые предписываемъ ходу доказательствъ, къ извѣстнымъ, наиболѣе общимъ результатамъ опыта, уже показавшимъ намъ практически выполнимость тѣхъ или иныхъ предписанныхъ нами частей доказательства. Опытный геометръ, проводя любую вспомогательную линію, для какого бы то ни было доказательства, спрашиваетъ, всегда ли воз-

можно провести линію желаемаго рода. Какъ извѣстно, въ системѣ геометріи существенную роль играютъ задачи на построеніе. При поверхностномъ разсмотрѣніи, онѣ представляются лишь практическими примѣненіями, придуманными для упражненія учениковъ. На самомъ же дѣлѣ эти задачи устанавливаютъ существованіе извѣстныхъ формъ. Онѣ показываютъ, что точки, прямыя, круги того рода, какіе требуется построить въ задачѣ, или возможны при всѣхъ условіяхъ, или съ извѣстными исключеніями. Пунктъ, около котораго вращаются изслѣдованія, разсмотрѣнныя ниже, существенно этого же рода. Основою всѣхъ доказательствъ по методу Евклида является доказательство совпаденія извѣстныхъ линій, угловъ, плоскихъ фигуръ, тѣлъ и т. д. Чтобы сдѣлать совпаденіе нагляднымъ, представляютъ себѣ, что тѣ или иныя геометрическія фигуры движутся одна къ другой, разумѣется, не измѣняя своей формы и измѣреній. Что это на самомъ дѣлѣ возможно и выполнимо, всѣ мы испытали съ самой ранней юности. Но если мы пытаемся построить необходимые законы мысли, исходя изъ этого допущенія свободной подвижности твердыхъ пространственныхъ фигуръ, при неизмѣняемости ихъ формы въ любой точкѣ пространства, то намъ приходится поставить вопросъ, не включается ли въ этомъ допущеніи какого либо ложнаго недоказуемаго предположенія.

Мы сейчасъ увидимъ, что на самомъ дѣлѣ

здѣсь включено такое предположеніе и притомъ весьма богатое послѣдствіями. Но если это такъ, то каждое доказательство совпаденія фигуръ основано лишь на фактѣ, взятомъ изъ опыта.

Я привожу эти соображенія сначала лишь съ тою цѣлью, чтобы выяснить, на какія трудности наталкиваемся мы при полномъ разборѣ всѣхъ сдѣланныхъ нами предположеній по методу нагляднаго представленія [1]). Мы избѣгаемъ этихъ трудностей, примѣняя къ изслѣдованію основаній геометріи выработанный новѣйшею геометріей аналитическій методъ. Все выполненіе вычисленія есть чисто логическая операція: она не можетъ дать никакого соотношенія между величинами, подвергнутыми вычисленію, которое не заключалось бы уже въ уравненіяхъ. образующихъ исходную посылку вычисленій. Упомянутыя новѣйшія изслѣдованія поэтому были проведены почти исключительно при посредствѣ чисто отвлеченныхъ методовъ аналитической геометріи.

Впрочемъ, послѣ того, какъ отвлеченный методъ обозначилъ существенные пункты,—до нѣкоторой степени, оказывается возможнымъ дать и наглядное представленіе этихъ пунктовъ. Всего лучше, если мы спустимся въ болѣе узкую область, каковою является нашъ собственный пространственный міръ. Предста-

[1]) Созерцанія, Anschauung.

вимъ себѣ—а въ этомъ нѣтъ никакой логической невозможности — одаренныя разсудкомъ существа всего лишь двухъ измѣреній, живущія на поверхности любого изъ нашихъ твердыхъ тѣлъ и движущіяся на ней. Примемъ, что эти существа не обладаютъ способностью воспринимать что либо внѣ этой поверхности, но обладаютъ воспріятіями, подобными нашимъ, внутри протяженія этой поверхности. Если такія существа выработаютъ свою геометрію, то они естественно припишутъ своему пространству лишь два измѣренія. Они найдутъ, что движущаяся точка описываетъ линію, а движущаяся линія—поверхность, которая для нихъ представляетъ наиболѣе совершенный, имъ извѣстный, пространственный образъ (Raumgebilde). Но они такъ же будутъ не въ состояніи составить себѣ представленіе о дальнѣйшемъ пространственномъ образѣ, который произошелъ бы, если бы поверхность выдвинулась изъ своего поверхностнаго пространства, какъ мы не въ состояніи составить себѣ представленіе объ образѣ, который получился бы при выдвиженіи тѣла изъ извѣстнаго намъ пространства. Подъ выраженіемъ „представлять себѣ“, которымъ часто злоупотребляютъ, или подъ выраженіемъ: „имѣть возможность мыслить, что нѣчто происходитъ“, я подразумѣваю,—а я не знаю, что иное можно подъ этимъ подразумѣвать, не измѣняя весь смыслъ выраженія,—я подразумѣваю возможность „начер-

тать“ себѣ рядъ чувственныхъ впечатлѣній, которыя у насъ могли бы возникнуть, если бы нѣчто такое произошло въ одномъ единичномъ случаѣ. Если же неизвѣстно ни одно чувственное впечатлѣніе, которое относилось бы къ такому, никогда не наблюдаемому событію, каковымъ для насъ является движеніе по четвертому измѣренію, и каковымъ для упомянутыхъ поверхностныхъ существъ было бы движеніе по извѣстному намъ третьему измѣренію, то такое „представленіе“ не возможно, точно такъ же, какъ абсолютно слѣпой отъ рожденія не сможетъ „представить себѣ“ цвѣта, если даже дать ему описаніе его при посредствѣ понятій.

Наши поверхностныя существа могли бы, далѣе, проводить кратчайшія линіи въ своемъ поверхностномъ пространствѣ. Это не были бы непремѣнно прямыя линіи въ нашемъ смыслѣ, но то, что въ геометріи называютъ геодезическими линіями поверхности [1]), на которой живутъ эти существа, такія линіи, какія описываетъ натянутая и положенная на поверхность нить, могущая скользить па ней безъ помѣхи. Я позволю себѣ далѣе называть подоб-

---

[1]) Т. е. кратчайшими разстояніями, по которымъ можно достичь одной точки, исходя изъ другой и двигаясь такъ, чтобы не сходить съ поверхности. Такъ напр. кратчайшія разстоянія на шарѣ измѣряются не прямыми, а дугами большихъ круговъ шара. *Перев.*

ныя линіи *прямѣйшими* линіями *данной* поверхности (относительно даннаго пространства), чтобы такимъ образомъ выставить на видъ ихъ аналогію съ прямою линіей на плоскости. Я надѣюсь посредствомъ этого выраженія сдѣлать понятіе о геодезическихъ линіяхъ болѣе нагляднымъ для не-математиковъ, не подавая, однако, повода къ смѣшенію понятій.

Если бы теперь существа этого рода жили на безконечной *плоскости*, то они установили бы какъ разъ ту самую геометрію, которая составляетъ нашу планиметрію. Они утверждали бы, что между двумя точками возможна лишь *одна* прямая, что чрезъ третью, внѣ данной прямой лежащую точку, можетъ быть проведена лишь *одна* параллельная прямая къ данной, что вообще прямыя могутъ быть продолжены до безконечности, безъ того, чтобы ихъ концы опять встрѣтились и т. д. Ихъ пространство могло быть протяженнымъ до безконечности, но и въ томъ случаѣ, если бы они достигли границъ своего движенія и воспріятія, они могли бы наглядно представить себѣ продолженіе по ту сторону этихъ границъ, и въ этомъ представленіи ихъ пространство представилось бы имъ безконечно протяженнымъ, какъ разъ, какъ и наше,—хотя и мы сами, т. е. наше тѣло не можетъ оставить земного шара, а нашъ взоръ достигаетъ лишь туда, гдѣ существуютъ видимыя звѣзды.

Однако, разумныя существа этого рода могли бы жить также и на поверхности шара. Ихъ кратчайшей или прямѣйшей линіей между двумя точками была бы тогда дуга наибольшаго (большого) круга, который можно провести черезъ эти точки. Каждый большой кругъ, проходящій черезъ двѣ данныя точки, распадается при этомъ на двѣ части. Если обѣ—неравной длины, то меньшая, во всякомъ случаѣ, есть единственная кратчайшая линія на шарѣ, существующая между двумя данными точками. Но также и другая большая дуга того же наибольшаго круга есть геодезическая или прямѣйшая линія, т. е. каждый меньшій ея отрѣзокъ есть въ свою очередь кратчайшая линія между обѣими своими конечными точками. Ради этого обстоятельства мы не можемъ прямо отожествить понятіе геодезической или прямѣйшей линіи съ понятіемъ кратчайшей линіи. Если теперь обѣ данныя точки суть оконечности одного и того же діаметра шара, то всѣ, проведенныя черезъ этотъ діаметръ плоскости пересѣкутъ шаровую поверхность, образуя (въ одну сторону) полукругъ, и всѣ эти полукруги будутъ кратчайшими линіями между двумя оконечностями діаметра. Въ этомъ случаѣ, стало быть, существуетъ безконечное число равныхъ между собою кратчайшихъ линій между двумя данными точками. Такимъ образомъ, аксіома, что между двумя точками существуетъ лишь одна кратчайшая линія, была бы справедлива

для обитателей шаровой поверхности лишь съ извѣстнымъ исключенiемъ [1]).

Параллельныхъ (кратчайшихъ) линiй совсѣмъ не знали бы обитатели шаровой поверхности [2]). Они утверждали-бы, что любыя двѣ прямѣйшiя линiи, по достаточномъ продолженiи, наконецъ должны были бы пересѣчься не только въ одной, но въ двухъ точкахъ. Сумма угловъ въ треугольникѣ всегда была бы болѣе двухъ прямыхъ и тѣмъ болѣе, чѣмъ больше поверхность треугольника. Именно поэтому у нихъ отсутствовало-бы также и понятiе о геометрическомъ подобiи формы между большими и меньшими фигурами того-же рода; потому что большiй треугольникъ у нихъ имѣетъ необходимо иные углы, нежели меньшiй. Ихъ пространство было-бы, конечно, неограниченнымъ (не имѣющимъ опредѣленныхъ границъ), но было-бы конечнымъ или, по крайней мѣрѣ, пришлось бы его представить себѣ, какъ обладающее конечнымъ протяженiемъ.

Ясно, что существа, живущiя на шарѣ и обладающiя тѣми-же логическими способно-

[1]) Если бы кто либо на земномъ шарѣ, достигнувъ сѣвернаго полюса, вздумалъ избрать кратчайшiй путь къ южному полюсу, то имѣлъ бы безконечную свободу выбора, ибо кратчайшiй путь идетъ по любому большому кругу, соединяющему полюсы, т. е. по любому меридiану, предполагая, что земля есть совершенный шаръ, вездѣ гладкiй и одинаково удобный для путешествiя. *Перев.*

[2]) Малые круги, параллельные напр. экватору, не суть „кратчайшiя“ линiи. *Перев.*

стями, какими обладаютъ существа на плоскости, должны были-бы все-таки установить совсѣмъ иную систему геометрическихъ аксіомъ, чѣмъ плоскія существа и чѣмъ мы сами, въ нашемъ пространствѣ трехъ измѣреній. Эти примѣры уже показываютъ намъ, что, смотря по роду мѣстожительства, должны быть выставлены различныя геометрическія аксіомы существами, которыя могли-бы обладать силами разсудка, совершенно соотвѣтствующими нашимъ.

Но пойдемъ далѣе. Представимъ себѣ разумныя существа, живущія на поверхности яйцевиднаго тѣла. Между любыми тремя точками такой поверхности можно было-бы проводить (попарно) кратчайшія линіи и такимъ образомъ построить треугольникъ. Но если-бы мы попытались построить въ разныхъ мѣстахъ этой поверхности совпадающіе между собою (путемъ наложенія) треугольники, то оказалось-бы, что, если два треугольника обладаютъ сторонами равной длины, то ихъ углы не равновелики. Начерченный на остромъ концѣ яйца треугольникъ обладаетъ суммою угловъ, болѣе отличающеюся отъ двухъ прямыхъ, чѣмъ треугольникъ съ такими-же сторонами, начерченный на болѣе тупомъ концѣ; отсюда вытекаетъ, что на такой поверхности даже такой простой пространственный образъ, каковъ треугольникъ, не могъ-бы быть передвинутымъ съ одного мѣста на другое безъ измѣненія своей формы. Точно также оказалось-бы, что если-бы на

различныхъ мѣстахъ такой поверхности были построены круги равными радіусами (длины радіусовъ всегда слѣдовало-бы измѣрять кратчайшими линіями по поверхности), то окружность такого круга на тупомъ концѣ была-бы больше, чѣмъ на остромъ.

Отсюда далѣе слѣдуетъ, что, лишь въ силу особаго геометрическаго свойства какой либо поверхности [1]), лежащія на ней фигуры могутъ свободно передвигаться по поверхности безъ измѣненія всѣхъ ихъ измѣренныхъ по поверхности линій и угловъ, и что такое передвиженіе возможно не по всякой поверхности. Условіе для того, чтобы какая либо поверхность обладала этимъ важнымъ свойствомъ, опредѣлилъ уже Гауссъ въ своемъ знаменитомъ сочиненіи о кривизнѣ поверхностей [2]). Условіе это состоитъ въ томъ, чтобы особая величина, названная Гауссомъ „мѣрою кривизны" (а именно, единица, дѣленная на произведеніе обоихъ главныхъ радіусовъ кривизны). всюду вдоль всего протяженія поверхности оставалась одинаковою.

Гауссъ доказалъ въ то же время, что эта мѣра кривизны не измѣняется, если поверхность сгибается безъ того, чтобы испытать гдѣ либо растяженіе или сжатіе. Такъ напр.,

[1]) Таковы напр. плоскость, шаровая поверхность и др. *Перев.*

[2]) Русскій переводъ этой статьи появился въ 1894 году въ „Матем. Листкѣ" Научнаго Обозрѣнія. *Ред.*

мы можемъ свернуть плоскій листъ бумаги въ цилиндръ или въ конусъ, безъ того, чтобы взятыя по поверхности листа измѣренія начерченныхъ на листѣ фигуръ измѣнили величину. И такимъ же образомъ мы можемъ свернуть полушаровидную замкнутую половину плавательнаго пузыря въ родъ веретена, не измѣняя измѣреній фигуръ, взятыхъ на этой поверхности. Поэтому, геометрія на плоскости та же, что и на цилиндрической поверхности. Въ послѣднемъ случаѣ мы должны себѣ только представить, что неограниченно многочисленныя положенія этой поверхности, какъ напр. положенія свернутаго (нѣсколько разъ) въ трубку листа бумаги, наложены одно сверхъ другого, и что при полномъ обходѣ вокругъ цилиндра, мы переходимъ къ другому положенію, отличному отъ предыдущаго.

Эти замѣчанія необходимы, чтобы дать вамъ представленіе объ особомъ родѣ поверхности, на которой геомѐтрія совершенно подобна плоской геометріи, но съ тѣмъ различіемъ, что аксіома о параллельныхъ линіяхъ здѣсь не примѣнима. Это родъ кривой поверхности, которая въ геометрическомъ отношеніи представляется, какъ бы противоположность шара, и которая, поэтому, получила отъ отличнаго итальянскаго математика Бельтрами (E. Beltrami) [1]), которой

[1]) Saggio di Interpretazione della Geometria Non-Euclidea, Napoli 1868. Teoria fondamentale degli Spazij di Curvatura costante. Ann. di Matem. Ser. II, T. II, p. 232—255.

рый изслѣдовалъ ея свойства, названіе псевдосферической поверхности. Это сѣдлообразная поверхность; въ нашемъ пространствѣ могутъ быть изображены связно лишь ея ограниченныя части или полосы, и тѣмъ не менѣе ее можно вообразить продолженной по всѣмъ направленіямъ до безконечности, такъ какъ каждый ея кусокъ, находящійся на границѣ построенной части этой поверхности, можетъ быть отодвинутъ назадъ, къ ея серединѣ, и затѣмъ можетъ быть мыслимъ, какъ продолженный. Передвинутая ограниченная часть (кусокъ) поверхности при этомъ должна измѣнить свой изгибъ, но не свои измѣренія, совершенно такъ же, какъ на конусѣ, образованномъ при сворачиваніи плоскаго листа въ трубку (корнетикъ), можно передвигать взадъ и впередъ листъ бумаги. Такой листъ вездѣ прикладывается къ конической поверхности, но ближе къ вершинѣ конуса долженъ быть согнутъ сильнѣе, и не можетъ быть передвинутъ за вершину конуса такъ, чтобы остаться наложеннымъ и на существующій конусъ, и на его идеальное продолженіе по ту сторону вершины. — Подобно плоскости и шару, псевдосферическія поверхности суть поверхности постоянной кривизны, такъ что каждая ограниченная ихъ часть (кусокъ) можетъ быть положена на каждое другое мѣсто поверхности, вполнѣ къ нему примыкая, и стало быть всѣ построенныя на одномъ мѣстѣ поверхности фигуры мо-

гутъ быть перенесены на всякое другое мѣсто, сохраняя вполнѣ совпадающую форму и полное равенство всѣхъ взятыхъ по самой поверхности измѣреній. Установленная Гауссомъ мѣра кривизны, которая для шара положительна, а для плоскости равна нулю, для псевдосферическихъ поверхностей имѣла бы постоянное отрицательное значеніе, потому что обѣ главныя кривизны сѣдлообразной поверхности повернуты своими вогнутостями въ противоположныя стороны.

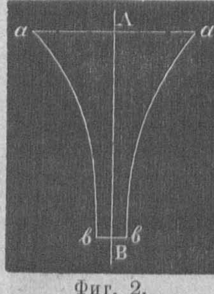
Полосы псевдосферической поверхности могутъ быть напр. изображены въ свернутомъ видѣ, какъ поверхность кольца. Представьте себѣ поверхность вродѣ *a a b b* (фиг. 1), вращаемую вокругъ ея оси симметріи; тогда обѣ дуги *ab* опишутъ такую кольцевую псевдосферическую поверхность. Оба края поверхности, вверху при *aa* и внизу при *bb* поворачивались бы наружу, пріобрѣтая все болѣе рѣзкій изгибъ, пока, наконецъ, поверхность не станетъ перпендикулярно къ оси *(A B)* и тогда она закончится у грани, обладая здѣсь безконечно большой кривизной [1]). Точно также можно свер-

Фиг. 1.

[1]) Безконечно большую мѣру кривизны имѣетъ также напр. поверхность безконечно малаго шара, такъ какъ въ этомъ случаѣ оба радіуса главной кривизны, т. е. двухъ главныхъ сѣченій, будутъ безконечно малыми. *Перев.*

нуть половину псевдосферической поверхности и въ видѣ бокала для шампанскаго, но съ безконечно удлиненнымъ, все болѣе утончающимся горлышкомъ (фиг. 2).

Но съ одной стороны она всегда необходимо ограничивается рѣзко прерваннымъ краемъ, и далѣе этого непрерывное продолженіе поверхности невыполнимо непосредственно. Лишь такимъ образомъ, что каждый отдѣльный кусокъ края будетъ отрѣзанъ и мысленно продвинутъ вдоль поверхности кольца или бокала, можно поставить его на мѣста, обладающія инымъ изгибомъ, и съ этихъ мѣстъ возможно дальнѣйшее продолженіе разсматриваемаго куска поверхности.



Фиг. 2.

Этимъ способомъ можно также безконечно продолжить и прямѣйшія линіи псевдосферической поверхности. Онѣ не замыкаются, подобно прямѣйшимъ линіямъ шара, но, подобно прямымъ на плоскости, здѣсь всегда возможна лишь одна единственная кратчайшая линія между двумя данными точками. Но аксіома пареллельныхъ линій здѣсь не подтверждается. Если дана на поверхности прямѣйшая линія и внѣ ея точка, то можно провести чрезъ точку цѣлый пучокъ прямѣйшихъ линій, при чемъ всѣ онѣ не пересѣкаютъ первую названную прямую, хотя

бы мы продолжали ихъ до безконечности [1]).

Это линіи, лежащія между двумя, ограничивающими пучокъ прямѣйшими линіями; одна изъ нихъ, продолженная до безконечности, встрѣчаетъ первую названную линію на безконечности при продолженіи въ одну сторону, другая—при продолженіи въ другую сторону.

Впрочемъ, подобную геометрію, отвергающую аксіому о параллельныхъ линіяхъ, выработалъ вполнѣ еще въ 1829 г., по синтетическому методу Евклида, Н. И. Лобачевскій, проф. математики въ Казани. Оказалось, что его система можетъ быть проведена такъ же послѣдовательно и безъ противорѣчій, какъ и система Евклида. Эта геометрія находится въ полнѣйшемъ согласіи съ геометріей псевдосферическихъ поверхностей, какъ ее выработалъ въ новѣйшее время Бельтрами.

Мы видимъ отсюда, что въ геометріи двухъ измѣреній предположеніе, что всякая фигура можетъ безъ всякаго измѣненія ея взятыхъ по поверхности измѣреній, передвигаться по всѣмъ направленіямъ, характеризуетъ данную поверхность, какъ плоскость, шаръ или же псевдосферическую поверхность. Аксіома, по которой между любыми двумя точками всегда существуетъ лишь одна прямѣйшая линія, отличаетъ плоскость и псевдосферу отъ шара; аксіома о параллельныхъ отличаетъ плоскость отъ

[1]) Сравн. въ „Научн. Об.“, 1894 г., статьи М. Филиппова о геометріи Лобачевскаго.

псевдосферы. Эти три аксіомы, стало быть, дѣйствительно необходимы и достаточны для того, чтобы характеризовать плоскость, къ которой относится планиметрія Евклида, въ противоположность ко всѣмъ инымъ пространственнымъ образамъ двухъ измѣреній.

Различіе между геометріей на плоскости и на шаровой поверхности давно уже было яснымъ и нагляднымъ, но смыслъ аксіомы о параллельныхъ могъ быть понятъ лишь съ тѣхъ поръ, какъ Гауссъ установилъ понятіе о поверхностяхъ, сгибаемыхъ безъ растяженія,—и такимъ образомъ явилась возможность указать на безконечную продолжаемость псевдосферическихъ поверхностей. Мы, какъ обитатели трехмѣрнаго пространства, одаренные органами чувствъ для воспріятія всѣхъ этихъ измѣреній, можемъ себѣ, правда, наглядно представить различные случаи, при которыхъ поверхностныя существа (двухъ измѣреній) могли бы выработать свое пространственное созерцаніе, такъ какъ съ этою цѣлью намъ стоитъ только ограничить наши собственныя созерцанія (наглядныя представленія) болѣе узкою областью. Отбросить созерцанія, которыми мы обладаемъ, легко; но представить себѣ чувственно созерцанія, для которыхъ мы никогда не имѣли ничего аналогичнаго, очень трудно. Когда мы, поэтому, переходимъ къ пространству трехъ измѣреній, то мы стѣснены въ нашей способности представленія—строеніемъ нашихъ орга-

новъ и пріобрѣтенными при ихъ посредствѣ фактами опыта, подходящими лишь къ тому пространству, въ которомъ мы живемъ.

Но у насъ есть еще другой путь для научной обработки геометріи. Всѣ извѣстныя намъ пространственныя отношенія измѣримы, т. е. они могутъ быть приведены къ опредѣленію величинъ (длины линій, величины угловъ, поверхностей, объемовъ). Именно поэтому задачи геометріи могутъ быть разрѣшены лишь такимъ образомъ, что мы выискиваемъ способы вычисленія, при помощи которыхъ неизвѣстныя пространственныя величины могутъ быть выведены изъ извѣстныхъ. Это происходитъ въ аналитической геометріи, гдѣ всѣ пространственныя формы разсматриваются лишь какъ величины и опредѣляются другими величинами. Также уже наши (геометрическія) аксіомы содержатъ предложенія о пространственныхъ величинахъ. Прямая линія опредѣляется, какъ *кратчайшая* между двумя точками, а это есть опредѣленіе величины. Аксіома о параллельныхъ линіяхъ выражаетъ, что, если двѣ прямыя на одной и той-же плоскости не пересѣкаются между собою (параллельны), то соотвѣтственные углы, а также по разныя стороны лежащіе (равные соотвѣтственнымъ), образуемые съ третьею, ихъ пересѣкающею прямою, попарно равны. Или вмѣсто этого подставляется предложеніе, что сумма угловъ въ каждомъ треугольникѣ равна двумъ прямымъ. Но все это—опредѣленія ве-

личинъ. Но можно, стало быть, исходить также изъ той стороны понятія о пространствѣ, что положеніе каждой точки, по отношенію къ нѣкоторому, разсматриваемому, какъ неподвижный, пространственному образу (система координатъ), можетъ быть опредѣлено измѣреніями любыхъ величинъ; затѣмъ можно разсмотрѣть, какія особыя опредѣленія свойственны нашему пространству, какъ оно представляется при фактически выполняемыхъ измѣреніяхъ, и есть-ли такія опредѣленія, которыми это пространство отличается отъ сходныхъ многообразно протяженныхъ величинъ. Этотъ путь впервые указалъ, къ сожалѣнію, слишкомъ рано умершій, геттингенскій ученый Риманнъ [1]). Путь этотъ имѣетъ то своеобразное преимущество, что всѣ свойственныя ему операціи представляютъ собою чистыя вычисляемыя опредѣленія величинъ, причемъ опасность, что привычные факты нагляднаго представленія будутъ подсунуты, какъ необходимые элементы мышленія, совершенно отпадаетъ.

Число отмѣриваній (Abmessungen), необходимое для опредѣленія положенія точки, равно числу измѣреній соотвѣтственнаго пространства. На линіи достаточно разстояніе отъ неподвижной точки, стало быть—одна величина; на поверхности необходимо уже задать раз-

[1]) Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. 10 Juni 1854. (Въ полномъ собраніи сочиненій Риманна).

стоянія отъ двухъ неподвижныхъ точекъ; въ пространствѣ — отъ трехъ, для того, чтобы опредѣлить положеніе точки; такъ, на земномъ шарѣ намъ необходимы долгота, широта мѣста и высота его надъ уровнемъ моря; въ аналитической геометріи обыкновенно пользуются разстояніемъ отъ трехъ координатныхъ плоскостей. Риманнъ называетъ систему различій, въ которой единичное можетъ быть опредѣлено *n* измѣреніями, *n*—кратно протяженнымъ многообразіемъ или многообразіемъ объ *n* измѣреніяхъ. Такимъ образомъ, извѣстное намъ пространство, въ которомъ мы живемъ, есть троекратно протяженное многообразіе точекъ; поверхность есть двукратное многообразіе, линія—однократное; время также есть однократное многообразіе. Также система цвѣтовъ (красокъ) образуетъ троекратное многообразіе, насколько, по изслѣдованіямъ Т. Юнга [1]) и Клэрка Максуэлля, каждый цвѣтъ можетъ быть представленъ, какъ смѣшеніе трехъ основныхъ цвѣтовъ, изъ которыхъ каждый надо взять въ опредѣленномъ количествѣ. Помощью кружка съ цвѣтными секторами можно, дѣйствительно, произвести такія смѣшенія и измѣренія ихъ пропорцій.

Точно также, область простыхъ звуковъ можетъ быть разсматриваема, какъ многообразіе *двухъ* измѣреній, если мы возьмемъ различія

[1]) По англійски произносится Іонгъ, но мы избрали обычное правописаніе. *Перев.*

лишь по высотѣ и силѣ звука и оставимъ въ сторонѣ различія „звуковой окраски" или тембра. Это обобщеніе понятія очень пригодно для того, чтобы выяснить, чѣмъ отличается пространство отъ другихъ трехмѣрныхъ многообразій. Мы можемъ, какъ всѣмъ вамъ извѣстно изъ повседневнаго опыта, сравнить въ пространствѣ разстояніе между двумя лежащими одна надъ другою точками съ горизонтальнымъ разстояніемъ между двумя точками на землѣ, потому что можемъ приложить одинъ и тотъ же масштабъ то къ одной, то къ другой парѣ. Но мы не можемъ сравнить разстоянія между двумя музыкальными тонами (звуками) равной высоты и различной напряженности съ разстояніемъ между двумя тонами равнаго напряженія и разной высоты. Риманнъ показалъ путемъ соображеній этого рода, что существенною основою всякой геометріи является выраженіе, посредствомъ котораго дано разстояніе, взятое между двумя, въ любомъ направленіи лежащими одна по отношенію къ другой, точками, и при томъ прежде всего между двумя безконечно мало удаленными между собою точками. Для этого разстоянія онъ взялъ изъ аналитической геометріи наиболѣе общую форму [2]).

[2]) А именно: квадратъ разстоянія между двумя безконечно близкими точками есть однородная функція второй степени отъ дифференціаловъ координатъ (не необходимо прямоугольныхъ, и при томъ это выраженіе можно обобщить на любое конечное число измѣреній). *Перев.*

Форма эта получается, если мы оставимъ совершенно произвольнымъ способъ отмѣриваній (Abmessungen), посредствомъ которыхъ задано мѣсто каждой точки. Затѣмъ, Риманнъ показалъ, что тотъ родъ свободы движенія при неизмѣняемости формы, который свойственъ тѣламъ въ нашемъ пространствѣ, можетъ существовать лишь въ томъ случаѣ, если извѣстныя, вытекающія изъ вычисленія величины[1]) (тѣ самыя, которыя въ примѣненіи къ отношеніямъ на поверхностяхъ приводятся къ Гауссовой мѣрѣ кривизны поверхностей) сохраняютъ всюду одно и то же постоянное значеніе. Именно поэтому Риманнъ называетъ эти вычисляемыя величины, если онѣ имѣютъ, для опредѣленнаго мѣста, одно и то же значеніе по всѣмъ направленіямъ, мѣрою кривизны соотвѣтственнаго пространства въ этомъ мѣстѣ. Чтобы предупредить недоразумѣнія[2]), я выставлю здѣсь на видъ лишь то, что эта, такъ называемая *мѣра кривизны пространства* есть величина, найденная чисто аналитическимъ путемъ, и что введеніе ея вовсе не основано на подсовываніи отношеній, которыя могли бы имѣть смыслъ въ чувствен-

[1]) Особое алгебраическое выраженіе, составленное изъ коэффиціентовъ отдѣльныхъ членовъ въ выраженіи для квадрата разстоянія двухъ сосѣднихъ точекъ, а также изъ ихъ первыхъ производныхъ.

[2]) Какое, напр., видимъ въ вышеупомянутой книгѣ Тобіаса на стр. 70 и мн. др.

номъ наглядномъ представленіи. Названіе это принято, лишь какъ краткое обозначеніе запутаннаго отношенія, и заимствовано отъ одного случая, въ которомъ названной величинѣ соотвѣтствуетъ чувственное наглядное представленіе.

Если эта мѣра кривизны пространства всюду обладаетъ значеніемъ, равнымъ нулю, то такое пространство всюду соотвѣтствуетъ аксіомамъ Евклида. Въ этомъ случаѣ мы можемъ назвать его *плоскимъ пространствомъ*, въ противоположность другимъ аналитически доступнымъ построенію пространствамъ, которыя можно назвать искривленными, такъ какъ ихъ мѣра кривизны обладаетъ величиною, отличною отъ нуля. Однако, аналитическая геометрія можетъ быть проведена и для пространствъ этого послѣдняго рода такъ же точно и послѣдовательно въ своей области, какъ и обыкновенная геометрія нашего фактически существующаго плоскаго пространства.

Если мѣра кривизны имѣетъ положительную величину, то мы получаемъ сферическое пространство, въ которомъ прямѣйшія линіи замыкаются, и въ которомъ нѣтъ параллельныхъ. Такое пространство, какъ и поверхность шара, было бы неограничено, но не безконечно велико. Наоборотъ, постоянная отрицательная величина даетъ псевдосферическое пространство, въ которомъ прямѣйшія линіи продолжаются до безконечности, и въ каждой „пло-

болѣе плоской“ поверхности чрезъ каждую точку можетъ быть проведенъ пучокъ прямѣйшихъ линій, которыя не пересѣкаютъ другой данной прямѣйшей линіи на этой поверхности.

Эти послѣднія отношенія Бельтрами [2]) сдѣлалъ доступными наглядному представленію, показавъ, какимъ образомъ точки, линіи и поверхности псевдосферическаго пространства трехъ измѣреній могутъ быть изображены внутри шара, въ Евклидовомъ пространствѣ, такимъ образомъ, что каждая прямѣйшая линія псевдосферическаго пространства замѣняется внутри шара прямою линіей, каждая „наиболѣе плоская“ поверхность псевдосферическаго пространства замѣняется плоскостью внутри того же шара. Самая шаровая поверхность при этомъ соотвѣтствуетъ безконечно отдаленнымъ точкамъ псевдосферическаго пространства; различныя части этого послѣдняго тѣмъ болѣе уменьшены въ ихъ шаровомъ изображеніи, чѣмъ ближе онѣ лежатъ къ поверхности шара и притомъ по направленію шаровыхъ радіусовъ сильнѣе, чѣмъ по перпендикулярнымъ къ нимъ направленіямъ. Прямыя линіи внутри шара, которыя пересѣкаются лишь внѣ шаровой поверхности, соотвѣтствуютъ тѣмъ прямѣйшимъ линіямъ псевдосферическаго пространства, которыя нигдѣ не пересѣкаются.

Этимъ было показано, что пространство,

---

[2]) Teoria fondamentale degli Spazii di Curvatura costante Ann. di Mat. Ser. II, T. II, Fasc. III, p. 232—255.

разсматриваемое, какъ область подлежащихъ измѣренію величинъ, ни мало не соотвѣтствуетъ наиболѣе общему понятію многообразія о трехъ измѣреніяхъ, но получаетъ еще особыя опредѣленія, которыя обусловлены совершенно свободною подвижностью твердыхъ тѣлъ неизмѣняемой формы во всѣ мѣста и при всѣхъ возможныхъ измѣненіяхъ направленія, и затѣмъ особою величиною мѣры кривизны, которая для фактически подлежащаго измѣренію пространства должна быть приравнен нулю или, по крайней мѣрѣ, не должна з мѣтно отличаться отъ нуля. Это послѣдн утверждепіе дано въ аксіомѣ о прямыхъ л ніяхъ и о параллельныхъ.

Въ то время какъ Риманнъ вступилъ въ новую область, исходя изъ наиболѣе общи основныхъ вопросовъ аналитической геомет я самъ пришелъ къ сходнымъ соображенія частью изслѣдуя пространственное изображе системы цвѣтовъ, т. е. путемъ сравненія од трехмѣрнаго многообразія съ другимъ, час посредствомъ изслѣдованій о происхожд нашего глазомѣра при измѣреніи поля зрѣ

Въ то время, какъ Риманнъ исходитъ вышеупомянутаго алгебраическаго выраже изображающаго въ самой общей формѣ стояніе между двумя безконечно близ между собою точками, какъ основнаго допущенія, и отсюда выводитъ предложенія о подвижности твердыхъ (неизмѣняемыхъ по формѣ)

пространственныхъ образовъ, я, съ своей стороны, исходилъ изъ того наблюдаемаго факта, что въ нашемъ пространствѣ движеніе твердыхъ пространственныхъ образовъ возможно съ извѣстною намъ степенью свободы, и изъ этого факта вывелъ необходимость того алгебраическаго выраженія, которое Риманнъ выставляетъ, какъ аксіому. Допущенія, которыя я долженъ былъ положить въ основаніе вычисленія, были слѣдующія.

Во-первыхъ, чтобы вообще сдѣлать возможнымъ вычисленіе, необходимо предположить, что положеніе любой точки А относительно извѣстныхъ, разсматриваемыхъ, какъ неизмѣнные и твердые, пространственныхъ образовъ, будь то линіи, или углы между линіями, или углы между плоскостями и т. д., можетъ быть опредѣлено. Какъ извѣстно, измѣренія, необходимыя для опредѣленія положенія точки А, называются ея координатами. Число вообще необходимыхъ для полнаго опредѣленія положенія каждой точки координатъ опредѣляетъ число измѣреній разсматриваемаго пространства. Далѣе предполагается, что при движеніи точки А пространственныя величины, примѣняемыя, какъ координаты, измѣняются непрерывно.

Во-вторыхъ, должно быть дано опредѣленіе твердаго тѣла относительно твердой (неизмѣняемой) системы точекъ, что необходимо, чтобы имѣть возможность сравнивать про-

странственныя величины путемъ совпаденія. Но такъ какъ мы еще не предполагаемъ никакихъ спеціальныхъ методовъ для измѣренія пространственныхъ величинъ, то опредѣленіе твердаго тѣла дается лишь слѣдующимъ признакомъ: между координатами каждыхъ двухъ точекъ, принадлежащихъ твердому тѣлу, должно существовать уравненіе, которое выражаетъ неизмѣнное при каждомъ движеніи тѣла пространственное соотношеніе между обѣими точками (которое, въ концѣ концовъ, оказывается ихъ разстояніемъ), равное для совпадающихъ паръ точекъ. Совпадающими мы называемъ такія пары точекъ, которыя могутъ совпадать одна вслѣдъ за другой съ однѣми и тѣми же, неподвижными въ пространствѣ, парами точекъ.

Несмотря на такую, повидимому, неопредѣленную постановку, это опредѣленіе чрезвычайно богато послѣдствіями, потому что при увеличеніи числа точекъ, число уравненій растетъ далеко быстрѣе, чѣмъ число опредѣляемыхъ этими уравненіями координатъ точекъ. Пять точекъ A, B, C, D, E даютъ десять различныхъ паръ точекъ:

AB, AC, AD, AE
BC, BD, BE
CD, CE
DE

стало быть десять уравненій, которыя въ трехмѣрномъ пространствѣ содержатъ 15 пере-

мѣнныхъ координатъ; изъ нихъ, однако, остается лишь шесть такихъ, которыми можно располагать свободно, если система изъ пяти точекъ должна быть свободно подвижна и способна къ вращенію.

Стало быть девять остающихся координатъ должны быть опредѣлены десятью упомянутыми уравненіями, какъ зависимыя отъ 6 перемѣнныхъ (независимыхъ). Для 6 точекъ получимъ 15 уравненій съ 12 перемѣнными, для 7 точекъ 21 уравненіе съ 15 перемѣнными и т. д. Но изъ n независимыхъ между собою уравненій, мы можемъ опредѣлить n заключенныхъ въ нихъ величинъ. Если у насъ есть болѣе, чѣмъ n уравненій, то мы должны быть въ состояніи сами вывесть лишнія уравненія изъ n первыхъ. Отсюда слѣдуетъ, что тѣ уравненія, которыя существуютъ между координатами каждой пары точекъ твердаго тѣла, должны быть особаго рода, такъ что, если эти уравненія выполнены въ трехмѣрномъ пространствѣ для 9 группъ точекъ, образованныхъ каждая изъ 5 точекъ, то изъ нихъ уравненіе для десятой группы слѣдуетъ тожественно.

Изъ этого обстоятельства вытекаетъ, что названное допущеніе для опредѣленія твердости все таки достаточно для того, чтобы опредѣлить характеръ уравненій, которыя существуютъ между координатами двухъ неизмѣнно между собою соединенныхъ точекъ.

Въ третьихъ оказалось, что въ основаніе

вычисленія должна была быть поставлена, какъ фактъ, еще одна особенность движенія неизмѣняемыхъ тѣлъ,—особенность настолько намъ знакомая, что безъ этого изслѣдованія, быть можетъ, намъ никогда бы не пришло на умъ считать ее тѣмъ, что могло бы и не быть. А именно, если мы въ нашемъ трехмѣрномъ пространствѣ укрѣпимъ двѣ точки неизмѣняемаго тѣла, то оно можетъ еще только совершать вращенія около прямой, соединяющей эти точки, какъ оси вращенія [1]). Если же мы дадимъ тѣлу полный оборотъ, то оно вновь точно совпадетъ съ тѣмъ положеніемъ, въ которомъ находилось сначала. То обстоятельство, что вращеніе безъ оборота назадъ (Drehung ohne Umkehr) приводитъ неизмѣняемое тѣло снова къ его начальному положенію, должно быть особо упомянуто. Возможна такая геометрія, гдѣ бы этого не было. Всего проще это видно для геометріи плоскости. Вообразимъ себѣ, что при каждомъ вращеніи плоской фигуры, ея линейныя измѣренія возрастаютъ пропорціонально углу вращенія; тогда, послѣ полнаго поворота на 360°, фигура болѣе не будетъ совпадать со своимъ начальнымъ положеніемъ. Но всякая другая фигура, совпадавшая съ первою въ ея начальномъ положеніи, могла бы быть приведена къ совпаденію съ нею и во второмъ положеніи, если и вторая

[1]) Это можно даже принять за особаго рода *опредѣленіе* прямой линіи. *Перев.*

фигура была повернута на 360° Можно было бы построить послѣдовательную систему геометріи и при этомъ предположеніи, которое не подходитъ къ формѣ, данной Риманномъ.

Съ другой стороны я показалъ, что перечисленныя три допущенія, взятыя вмѣстѣ, достаточны для того, чтобы обосновать принятую Риманномъ исходную точку изслѣдованія, а стало быть также и всѣ дальнѣйшіе результаты его работы, относящіеся къ различію разнаго рода пространствъ по ихъ мѣрѣ кривизны. Теперь остается только спросить, могутъ ли также законы движенія и ихъ зависимость отъ движущихъ силъ быть перенесены безъ противорѣчія на сферическія или псевдосферическія пространства? Это изслѣдованіе было произведено боннскимъ профессоромъ Липшицемъ [1]). Дѣйствительно, наиболѣе общее выраженіе всѣхъ законовъ динамики, принципъ Гамильтона, можетъ быть перенесенъ прямо на пространства, для которыхъ мѣра кривизны не равна нулю. Стало быть, и съ этой стороны, уклоняющіяся отъ обыкновенной, геометріи системы не впадаютъ ни въ какое противорѣчіе.

Далѣе мы должны спросить, откуда же происходятъ эти особыя опредѣленія, характеризующія наше пространство, какъ плоское, такъ

[1]) Lipschitz. Untersuch. üb. die ganzen homog. Funct. von *n* Differentialen. Borchardt's Journ. f. Math. LXX. S. 71 u LXXII, S. 1. Unters. eines Problems der Variationsrechnung. Тамъ-же LXXIV.

какъ эти опредѣленія, какъ оказалось, не содержатся въ общемъ понятіи протяженной трехмѣрной величины и свободной подвижности содержащихся въ ней ограниченныхъ образовъ. Необходимыми формами мышленія, вытекающими изъ понятія такого многообразія и его измѣримости или изъ общаго понятія неизмѣняемаго, содержащагося въ этомъ многообразіи, образа и его свободнѣйшей подвижности, — такими законами мысли эти опредѣленія также не являются.

Изслѣдуемъ теперь противоположное допущеніе, которое можетъ быть сдѣлано о происхожденіи этихъ опредѣленій, а именно вопросъ, не *эмпирическаго* ли они происхожденія, нельзя ли ихъ вывести изъ фактовъ опыта, доказать этими фактами, испытать, или, быть можетъ, даже опровергнуть. Этотъ послѣдній случай включилъ бы въ себя и то, что мы могли бы представить себѣ ряды доступныхъ наблюденію фактовъ опыта, указывающихъ на иную величину мѣры кривизны, чѣмъ та, которою обладаетъ плоское пространство Евклида. Но если пространства другого рода представимы въ указанномъ смыслѣ, то этимъ было бы также опровергнуто, что аксіомы геометріи суть необходимыя слѣдствія апріорно данной трансцендентальной формы нашихъ наглядныхъ представленій, въ смыслѣ Канта.

Различіе между евклидовой, сферической и псевдосферической геометріею основано, какъ

выше упомянуто, на значеніи нѣкоторой постоянной, которую Риманнъ называетъ мѣрою кривизны соотвѣтственнаго пространства и которая равна нулю въ томъ случаѣ, когда справедливы аксіомы Евклида. Если она неравна нулю, то треугольники съ большимъ содержаніемъ поверхности будутъ имѣть иныя суммы угловъ, чѣмъ меньшіе треугольники; сумма эта будетъ для первыхъ изъ нихъ большею въ сферическомъ пространствѣ и меньшею въ псевдосферическомъ. Далѣе, геометрическое подобіе большихъ и малыхъ тѣлъ или фигуръ возможно лишь въ Евклидовскомъ пространствѣ.

Всѣ системы практически выполненныхъ геометрическихъ измѣреній, при которыхъ три угла большихъ прямолинейныхъ треугольниковъ измѣряются каждый порознь,—стало быть также всѣ системы астрономическихъ измѣреній, дающихъ параллаксъ неизмѣримо удаленныхъ неподвижныхъ звѣздъ равный нулю (въ псевдосферическомъ пространствѣ также и безконечно удаленныя точки имѣли бы положительные параллаксы), подтверждаютъ эмпирически аксіому о параллельныхъ и показываютъ, что въ нашемъ пространствѣ, и при примѣненіи нашихъ методовъ измѣренія, мѣра кривизны пространства оказывается неразличимою отъ нуля. Конечно, слѣдуетъ, вмѣстѣ съ Риманномъ, предложить вопросъ, не произошло ли бы нѣчто иное, если бы мы вмѣсто нашихъ

ограниченныхъ основныхъ линій, изъ которыхъ наибольшею является большая ось земной орбиты, могли воспользоваться еще большими. Но при этомъ мы не должны забывать, что всѣ геометрическія измѣренія, въ концѣ концовъ, основаны на принципѣ совпаденія. Мы измѣряемъ разстоянія точекъ, подвигая ножки циркуля или масштабъ, или измѣрительную цѣпь. Мы измѣряемъ углы, при чемъ ставимъ раздѣленный кругъ или теодолитъ, поставивъ его центръ въ вершинѣ угла. При этомъ мы опредѣляемъ прямыя линія посредствомъ прямолинейнаго— судя по нашему опыту—пути свѣтовыхъ лучей, но то обстоятельство, что свѣтъ распространяется по кратчайшимъ линіямъ, пока онъ остается въ средѣ неизмѣнной преломляемости, могло бы быть примѣнено и къ пространствамъ, съ иною мѣрою кривизны.

Всѣ наши геометрическія измѣренія основаны, стало быть, на предположеніи, что наши, признаваемыя нами за неизмѣняемыя, орудія измѣренія, дѣйствительно, суть тѣла неизмѣняемой формы, или что они, по крайней мѣрѣ, не испытываютъ никакихъ иныхъ измѣненій формы, исключая тѣхъ, которыя зависятъ напр., отъ измѣненія температуры, или отъ ничтожныхъ растяженій, зависящихъ отъ измѣненнаго дѣйствія силы тяжести при измѣненномъ положеніи.

Когда мы измѣряемъ, то мы при этомъ лишь выполняемъ, съ помощью лучшихъ и наи-

болѣе надежныхъ изъ извѣстныхъ намъ вспомогательныхъ средствъ, то самое, что мы въ въ иныхъ случаяхъ дѣлаемъ, наблюдая посредствомъ глазомѣра, чувства осязанія или отмѣриванія шагами. Въ этихъ послѣднихъ случаяхъ наше собственное тѣло съ его органами есть измѣрительный приборъ, который мы носимъ съ собою въ пространствѣ. То руки, то ноги играютъ для насъ роль циркуля; нашъ глазъ, поворачивающійся во всѣхъ направленіяхъ, служитъ теодолитомъ, посредствомъ кокотораго мы измѣряемъ длины дугъ или плоскостные углы въ полѣ зрѣнія.

Всякое сравнивающее между собою какія либо величины измѣреніе или оцѣнка пространственныхъ соотношеній исходитъ, стало быть, изъ предположенія о физической природѣ извѣстныхъ тѣлъ, нашего-ли собственнаго тѣла, или примѣняемыхъ измѣрительныхъ приборовъ; предположенія, конечно, могущаго имѣть высочайшую степень вѣроятности и находиться въ согласіи со всѣми извѣстными намъ иными физическими отношеніями, но, во всякомъ случаѣ, переступающаго область чистыхъ пространственныхъ интуицій.

Да, можно даже указать опредѣленное отношеніе тѣлъ, представляющихся намъ неизмѣняемыми, при которомъ измѣренія въ Евклидовскомъ пространствѣ привели бы къ такому результату, какъ будто они произведены въ псевдосферическомъ или въ сферическомъ пространствѣ.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, напомню прежде всего о томъ, что, еслибы всѣ линейныя измѣренія окружающихъ насъ тѣлъ и нашего собственнаго тѣла возрастали вмѣстѣ въ равномъ отношеніи, напр., всѣ наполовину стали меньше или всѣ увеличились вдвое, то такое измѣненіе вовсе не могло бы быть замѣчено при нашихъ средствахъ пространственнаго созерцанія. Но тоже самое произошло бы и въ томъ случаѣ, еслибы растяженіе или сжатіе по разнымъ направленіямъ было различнымъ, предполагая, что наше собственное тѣло измѣнилось бы такимъ же самымъ образомъ, и предполагая далѣе, что любое тѣло, при вращеніи въ любой моментъ, не испытывая и не оказывая механическаго сопротивленія, приняло бы ту степень растяженія его различныхъ измѣреній, которая соотвѣтствуетъ его положенію въ данные моменты.

Представьте себѣ изображеніе вселенной въ выпукломъ зеркалѣ. Извѣстные всѣмъ высеребренные шары, выставляемые въ садахъ, показываютъ существенныя явленія такого изображенія, хотя и не безъ нарушеній, вслѣдствіе нѣкоторыхъ оптическихъ неправильностей. Хорошо выработанное выпуклое зеркало не слишкомъ большого отверстія показываетъ зеркальное изображеніе каждаго находящагося передъ нимъ предмета позади своей поверхности, придавая этому изображенію тѣлесный видъ и опредѣленное положеніе и разстояніе. Но изображе-

нія далекаго горизонта и солнца находятся также на ограниченномъ разстояніи, равномъ фокусной длинѣ зеркала, позади зеркала. Между этими изображеніями и поверхностью зеркала содержатся изображенія всѣхъ другихъ лежащихъ передъ этимъ зеркаломъ объектовъ, но такъ, что изображенія тѣмъ значительнѣе уменьшены и приплюснуты, чѣмъ далѣе находятся ихъ объекты передъ зеркаломъ. Приплюснутость, т. е. уменьшеніе измѣренія вглубь, относительно значительнѣе, чѣмъ уменьшеніе измѣреній поверхностей.

Тѣмъ не менѣе, всякая прямая линія внѣшняго міра будетъ представлена въ изображеніи—прямою, всякая плоскость—плоскостью. Изображеніе человѣка, измѣряющаго масштабомъ (линейкой) удаляющуюся отъ зеркала прямую линію, постепенно все болѣе укорачивается, по мѣрѣ удаленія оригинала; однако своимъ также укороченнымъ (zusammengeschrumpft) масштабомъ человѣкъ въ изображеніи отсчиталъ бы точно такое же число сантиметровъ, какъ и настоящій человѣкъ.

Вообще всѣ геометрическія измѣренія, произведенныя линіями или углами, съ измѣняющимися по извѣстному закону зеркальными изображеніями дѣйствительныхъ инструментовъ, дали бы точно тѣ же результаты, какъ и во внѣшнемъ мірѣ; всѣ совпаденія въ изображеніяхъ, при наложеніи разсматриваемыхъ тѣлъ, были бы тѣ же, какъ и во внѣшнемъ мірѣ;

всѣ лучи зрѣнія (Visirlinien) внѣшняго міра были бы замѣнены въ зеркалѣ прямыми лучами зрѣнія. Словомъ, я не вижу, какимъ образомъ эти люди въ зеркалѣ могли бы узнать, что ихъ тѣла—не неизмѣняемыя (твердыя) тѣла, и ихъ опыты дали бы хорошіе примѣры для подтвержденія аксіомъ Евклида. Но еслибы они могли заглянуть въ нашъ міръ, какъ мы можемъ заглянуть къ нимъ, хотя не можемъ перейти его границы, то нашъ міръ представился бы имъ изображеніемъ въ выпукломъ зеркалѣ, и они стали бы говорить о насъ то же, что мы о нихъ; если же люди обоихъ міровъ могли бы переговариваться между собою, то, насколько я могу судить, они не могли бы убѣдить другъ друга, что одинъ видитъ все правильно, а другой въ искаженномъ видѣ; я не могу даже узнать, имѣетъ ли такой вопросъ вообще какой либо смыслъ, пока къ нему не примѣшаны соображенія механическаго характера.

Но данное Бельтрами изображеніе псевдосферическаго пространства въ полномъ шарѣ Евклидова пространства—совершенно того же рода, лишь съ тѣмъ различіемъ, что задняя поверхность не плоская, какъ для выпуклаго зеркала, а шаровая, и что отношеніе, въ которомъ сокращаются изображенія, приближающіяся къ шаровой поверхности, выражается другою математическою формулою (См. примѣчаніе въ концѣ статьи). Итакъ, если мы вообразимъ наоборотъ, что въ шарѣ, внутри котораго спра-

ведливы аксіомы Евклида, движутся тѣла, которыя, удаляясь отъ центра, постоянно стягиваются, подобно изображеніямъ въ выпукломъ зеркалѣ, и притомъ такъ, что ихъ изображенія, построенныя въ псевдосферическомъ пространствѣ, сохраняютъ неизмѣнныя измѣренія, то наблюдатели, у которыхъ тѣла были бы подвергнуты тому же правильному измѣненію, получили бы, при геометрическихъ измѣреніяхъ, ими производимыхъ, такіе результаты, какъ если бы жили сами въ псевдосферическомъ пространствѣ.

Мы можемъ, исходя изъ этого, сдѣлать еще шагъ впередъ; мы можемъ отсюда вывести, какими покажутся предметы псевдосферическаго міра наблюдателю, у котораго глазомѣръ и пространственный опытъ развился подобно нашему, въ плоскомъ пространствѣ, и который попалъ въ пространство псевдосферическое. Такой наблюдатель по прежнему считалъ бы линіи лучей зрѣнія (визирныя линіи) своего глаза прямыми, какія встрѣчаются въ плоскомъ пространствѣ, и каковы онѣ на самомъ дѣлѣ въ шаровомъ изображеніи псевдосферическаго пространства. Изображеніе объектовъ въ псевдосферическомъ пространствѣ для его зрѣнія произвело бы на него, поэтому, такое впечатлѣніе, какъ будто онъ находится въ центрѣ шарового изображенія, придуманнаго Бельтрами. Отдаленнѣйшіе предметы этого пространства онъ увидалъ бы вокругъ себя на

конечномъ разстояніи и счелъ бы ихъ находящимися, скажемъ примѣрно, на разстояніи ста футовъ [1]). Но подходя къ этимъ отдаленнымъ предметамъ, онъ увидѣлъ бы, что они растягиваются, и еще болѣе вглубь, чѣмъ по поверхности; сзади его предметы стягивались бы. Онъ узналъ бы, что судитъ ложно по глазомѣру.

Если бы онъ увидѣлъ двѣ прямыя, которыя по его оцѣнкѣ параллельны между собою до этого стофутоваго разстоянія, гдѣ міръ для него казался бы замкнутымъ, то, подходя къ нему, онъ увидѣлъ бы, что, при растяженіи предметовъ, къ которымъ онъ приближается, эти линіи раздвигаются, чѣмъ больше онъ къ нимъ подходитъ; сзади его, наоборотъ, ихъ разстояніе становилось бы все меньше, тогда какъ, по мѣрѣ шествія впередъ, линіи все болѣе расходятся и все дальше другъ отъ друга. Двѣ линіи, которыя въ начальной точкѣ казались ему сходящимися въ одной и той же точкѣ задняго фона на разстояніи 100 футъ, сходились бы всегда, сколько бы онъ ни шелъ, и онъ никогда не достигъ бы точки пересѣченія. Но совершенно подобныя изображенія нашего дѣйствительнаго міра мы получимъ, если возьмемъ большую выпуклую чечевицу съ соотвѣтственнымъ отрицательнымъ фокуснымъ

[1]) Единица, дѣленная на минусъ квадратъ этого разстоянія, была бы мѣрою кривизны даннаго псевдосферическаго пространства.

разстояніемъ и поставимъ передъ глазомъ; или даже два выпуклыхъ стекла, какъ въ очкахъ, лишь нѣсколько призматически отшлифованныхъ, какъ будто это куски цѣлой чечевицы болѣе значительнаго размѣра. Такія стекла и названное выпуклое зеркало приближаютъ отдаленные предметы; самые отдаленные—до разстоянія фокуса чечевицы. Если мы начнемъ ходить съ такой чечевицей передъ глазами, то произойдутъ растяженія предметовъ, къ которымъ мы приближаемся, какъ и въ псевдосферическомъ пространствѣ. Если кто либо возьметъ такую чечевицу, не со стофутовымъ фокуснымъ разстояніемъ, а гораздо сильнѣйшую, лишь съ 60 дюймовымъ разстояніемъ, то въ первую минуту ему, быть можетъ, покажется, что всѣ предметы приближаются. Но послѣ недолгаго хожденія взадъ и впередъ иллюзія исчезаетъ, и онъ судитъ о разстояніяхъ, несмотря на ложныя изображенія, вполнѣ правильно. Мы имѣемъ полное основаніе думать, что съ нами въ псевдосферическомъ пространствѣ было бы то же, что съ человѣкомъ, носящимъ очки и привыкающимъ къ нимъ уже черезъ нѣсколько часовъ; словомъ, псевдосферическое пространство показалось бы намъ сравнительно не особенно страннымъ, и только въ самомъ началѣ, при измѣреніи величины и разстоянія отдаленныхъ предметовъ, по производимому ими впечатлѣнію на наше зрѣніе, мы были бы подвержены ошибкамъ. Противоположныя иллюзіи произвело бы

сферическое трехмѣрное пространство, еслибы мы вступили въ него съ глазомѣромъ, пріобрѣтеннымъ въ Евклидовскомъ пространствѣ. Мы сочли бы отдаленные предметы еще болѣе отдаленными и большихъ размѣровъ, чѣмъ они на самомъ дѣлѣ; подходя къ нимъ, мы нашли бы, что достигаемъ ихъ скорѣе, чѣмъ полагали, судя по зрительному образу. Мы также увидѣли бы предъ собою предметы, которые могли бы фиксировать лишь расходящимися лучами зрѣнія, а именно всѣ тѣ, которые удалены отъ насъ болѣе, чѣмъ на четверть большого круга. Это зрѣлище, однако, едвали показалось бы намъ слишкомъ необыкновеннымъ, такъ какъ мы можемъ воспроизвесть его и для земныхъ предметовъ, если поставимъ передъ однимъ глазомъ слабо призматическое стекло, котораго болѣе толстая сторона повернута къ носу: тогда мы должны направить глаза такъ, что лучи зрѣнія разойдутся, иначе не увидимъ отдаленныхъ предметовъ. Это возбуждаетъ чувство необычайнаго напряженія глазъ, но замѣтно не измѣняетъ вида предметовъ. Но самое любопытное зрѣлище въ сферическомъ мірѣ представилъ бы нашъ собственный затылокъ, куда сошлись бы всѣ наши лучи зрѣнія, на сколько они могутъ свободно проходить между различными предметами: онъ занималъ бы крайній задній фонъ всего перспективнаго изображенія.

При этомъ, конечно, слѣдуетъ еще замѣтить, далѣе, что, подобно тому какъ маленькій

плоскій упругій кружокъ, (напр. каучуковая пластинка) можетъ быть приложенъ къ слабо искривленной шаровой поверхности лишь при относительномъ сокращеніи краевъ и растяженіи середины, такъ же точно и наше тѣло, выросшее въ Евклидовомъ плоскомъ пространствѣ, не могло бы перейти въ искривленное пространство безъ подобнаго рода растяженій частей, при чемъ связь ихъ, конечно, могла бы удержаться лишь до той поры, пока упругость частей допускала ихъ податливость безъ разрыва или излома. Родъ растяженія былъ бы тотъ самый, какъ еслибы мы вообразили себѣ въ центрѣ шара Бельтрами маленькое тѣло и затѣмъ перешли бы къ псевдосферическому или же сферическому изображенію этого тѣла. Чтобы такой переходъ показался возможнымъ, всегда слѣдуетъ предположить, что переходящее тѣло достаточно упруго и мало по сравненію съ вещественнымъ или мнимымъ радіусомъ кривизны шаровиднаго пространства, въ которое переходитъ это тѣло. Этого достаточно, чтобы показать, какъ указаннымъ путемъ вывести изъ извѣстныхъ законовъ нашихъ чувственныхъ воспріятій рядъ чувственныхъ впечатлѣній, которыя доставилъ бы намъ сферическій или псевдосферическій міръ, если бы онъ существовалъ. Также при этомъ мы нигдѣ не встрѣчаемъ ни непослѣдовательности, ни невозможности, какъ и при вычисленіи пространственныхъ отношеній Мы можемъ такъ же отлично раз-

рисовать зрѣлище псевдосферическаго міра по всѣмъ направленіямъ, какъ и развить его понятіе. Поэтому мы не можемъ допустить, чтобы аксіомы нашей геометріи были основаны на данной формѣ нашей способности созерцанія или чтобы онѣ какъ-либо были съ нею связаны.

Иначе обстоитъ дѣло съ тремя измѣреніями пространства. Такъ какъ всѣ наши средства чувственнаго созерцанія относятся лишь къ трехмѣрному пространству, и четвертое измѣреніе было бы не только измѣненіемъ существующаго, но и чѣмъ то совершенно новымъ, то здѣсь уже, вслѣдствіе нашей тѣлесной организаціи, мы находимся въ полной невозможности представить себѣ способъ созерцанія четвертаго измѣренія.

Въ заключеніе, я хотѣлъ бы еще выставить на видъ, что геометрическія аксіомы вовсе не такія предложенія, которыя принадлежатъ лишь чистому ученію о пространствѣ. Онѣ высказываютъ, какъ и я уже замѣтилъ, утвержденія о величинахъ. О величинахъ можно говорить только, если мы знаемъ и сознаемъ какой бы то ни было способъ, по которому можно эти величины сравнивать, разлагать на части и измѣрять. Каждое измѣреніе пространства и поэтому вообще всѣ примѣненныя къ пространству понятія о величинахъ предполагаютъ, стало быть, возможность движенія пространственныхъ образовъ, которыхъ форму и

величину, несмотря на движеніе, мы вправѣ считать неизмѣнными. Такія пространственныя формы въ геометріи, правда, принято обозначать лишь какъ геометрическія тѣла, поверхности, углы, линіи, потому что мы отвлекаемъ ихъ отъ всѣхъ прочихъ различій физическаго и химическаго характера, свойственныхъ тѣламъ; однако, одно физическое свойство остается, а именно твердость (неизмѣняемость). Но для неизмѣняемости тѣлъ и образовъ мы не имѣемъ никакого другого признака кромѣ того, что они во всякое время и во всякомъ мѣстѣ и послѣ всякаго вращенія, будучи наложены одно на другое, всегда даютъ тѣ же совпаденія, какъ и раньше. Но не измѣнились ли наложенныя другъ на друга тѣла,— оба въ одинаковомъ направленіи, этого мы вовсе не можемъ рѣшить чисто геометрическимъ путемъ, не прибѣгая къ механическимъ соображеніямъ.

Если-бы мы сочли это полезнымъ для какой либо цѣли, мы могли-бы вполнѣ послѣдовательно разсматривать пространство, въ которомъ мы живемъ, какъ кажущееся пространство, позади выпуклаго зеркала съ укороченнымъ и съуженнымъ фономъ; или-же мы могли-бы разсматривать ограниченный шаръ въ нашемъ пространствѣ (взятый такъ, что по ту его сторону мы ничего уже неспособны воспринимать), какъ безконечное псевдосферическое пространство. Для этого стоило-бы только при-

писать тѣламъ, которыя кажутся намъ твердыми (неизмѣняемыми), а также и нашему собственному тѣлу, одновременныя соотвѣтственныя растяженія и укорачиванія; при этомъ, конечно, пришлось-бы совершенно измѣнить систему нашихъ механическихъ принциповъ: такъ какъ уже то предложеніе, что каждая подвижная точка, на которую не дѣйствуетъ никакая сила, движется *по прямой* съ неизмѣнной скоростью, — это предложеніе уже не подходитъ къ изображенію нашего міра въ выпукломъ зеркалѣ. Траекторія (т. е. путь движущейся точки) все еще будетъ прямая, но скорость будетъ зависѣть отъ мѣста.

Итакъ, геометрическія аксіомы гласятъ не только о пространственныхъ отношеніяхъ, но въ тоже время и о механическомъ отношеніи нашихъ твердыхъ тѣлъ при движеніяхъ. Можно конечно разсматривать такое понятіе твердаго геометрическаго пространственнаго образа, какъ трансцендентальное понятіе, будто бы образованное независимо отъ дѣйствительнаго опыта, и которому этотъ опытъ вовсе не долженъ необходимо соотвѣтствовать, точно такъ же, какъ наши физическія тѣла фактически не соотвѣтствуютъ вполнѣ и въ чистомъ видѣ даже тѣмъ понятіямъ, которыя мы отвлекаемъ отъ нихъ путемъ индукціи. Присоединивъ такое понятіе о твердости, разсматриваемое лишь какъ идеалъ, строгій кантіанецъ конечно могъ-бы разсматривать геометрическія

аксіомы, какъ апріорно, посредствомъ трансцендентальнаго созерцанія, данныя предложенія, которыя не подлежатъ ни подтвержденію, ни опроверженію какимъ-бы то ни было опытомъ, потому что лишь помощью этихъ аксіомъ можно было-бы рѣшить, слѣдуетъ-ли разсматривать какое-бы то ни было физическое тѣло, какъ твердое. Но тогда намъ пришлось-бы утверждать, что съ этой точки зрѣнія, геометрическія аксіомы—вовсе не синтетическія предложенія въ смыслѣ Канта. Дѣйствительно, онѣ тогда высказывали-бы лишь нѣчто такое, что могло бы слѣдовать *аналитически* изъ понятій, необходимыхъ для измѣренія твердыхъ геометрическихъ образовъ, такъ какъ лишь такіе образы могли-бы быть признаваемы твердыми, которые удовлетворяютъ этимъ аксіомамъ. Но если мы присоединимъ къ геометрическимъ аксіомамъ еще предложенія, относящіяся къ механическимъ свойствамъ тѣлъ природы, хотя бы только предложеніе, относящееся къ инерціи, или предложеніе, что механическія и физическія свойства тѣлъ при прочихъ равныхъ условіяхъ не могутъ зависѣть отъ мѣста, занимаемаго тѣломъ, тогда такая система предложеній пріобрѣтаетъ дѣйствительное содержаніе, которое можетъ быть подтверждено или опровергнуто опытомъ, а именно потому можетъ быть также и добыто опытомъ.

Впрочемъ, вовсе не моя цѣль утверждать, что человѣчество добыло пространственныя

интуиціи, соотвѣтствующія аксіомамъ Евклида, лишь чрезъ посредство тщательно выполненныхъ системъ точныхъ геометрическихъ измѣреній. Скорѣе рядъ обыденныхъ опытовъ, особенно созерцаніе геометрическаго подобія большихъ и малыхъ тѣлъ — подобія, возможнаго лишь въ „плоскомъ" пространствѣ, привело къ тому, что каждое геометрическое созерцаніе, которое противорѣчило этому факту, отбрасывалось, какъ невозможное. Для этого не было надобности ни въ какомъ познаніи связи понятій между наблюдаемымъ фактомъ геометрическаго подобія и аксіомами, но лишь посредствомъ многочисленныхъ и точныхъ наблюденій пространственныхъ отношеній было добыто знаніе ихъ типическаго характера,—родъ созерцанія, какимъ обладаетъ художникъ по отношенію къ подлежащимъ изображенію имъ предметамъ, при помощи котораго онъ пр вильно и тонко судитъ о томъ, соотвѣтствуетъ-ли испытуемая новая комбинація природѣ изображаемаго предмета или-же не соотвѣтствуетъ. Хотя для этого на нашемъ языкѣ нѣтъ другого названія кромѣ „созерцанія"; но это не что иное, какъ эмпирическое знаніе, пріобрѣтенное путемъ накопленія и усиленія однородно вoзобновляющихся впечатлѣній, а никакъ не трансцендентальная и данная до всякаго опыта форма созерцанія. Подобныя эмпирически добытыя—и еще не переработанныя въ ясно и опредѣленно выраженное понятіе — созерцанія

типичныхъ закономѣрныхъ соотношеній довольно часто импонировали метафизикамъ, какъ апріорно данныя предложенія; но этого я здѣсь не имѣю необходимости разъяснять подробнѣе.

Добавленіе. Математическія поясненія.

Основанія геометріи сферическихъ пространствъ трехъ измѣреній всего легче получаются, если для пространства *четырехъ* измѣреній установить уравненіе, соотвѣтствующее шару:

$$1)\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2$$

Для разстоянія ds между точкою (x, y, z, t) и смежною $[(x + dx), (y + dy), (z + dz), (t + dt)]$ получимъ:

$$2)\ ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2$$

Помощью тѣхъ же способовъ, какіе примѣняютъ къ тремъ измѣреніямъ, легко убѣдиться, что кратчайшія линіи даются уравненіями:

$$3)\ \begin{cases} ax + by + cz + ft = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \varphi t = 0 \end{cases}$$

гдѣ a, b, c, f, а также α, β, γ, φ постоянныя.

Длина кратчайшей дуги s между точками (x, y, z, t) и (ξ, η, ζ, τ) получится, какъ и на шарѣ изъ уравненія

$$4)\ \cos\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta + t\tau}{R^2}$$

Изъ 2), 3) и 4) одна изъ координатъ исключается помощью 1), тогда наши выраженія будутъ относиться къ сферическому трехмѣрному пространству.

Взявъ разстоянія отъ точки

$$\xi = \eta = \zeta \quad 0$$

откуда изъ 1) имѣемъ $\tau = R$ найдемъ

$$\sin\left(\frac{S_0}{R}\right) \quad \frac{\sigma}{R}$$

Гдѣ $\sqrt{x \quad y^2 + z^2}$

или

$$5) \; S_0 \quad R.\, arc\, sin\left(\frac{\sigma}{R}\right) \quad R.\, arc\, tg \quad \sigma$$

Здѣсь S_0 обозначаетъ разстояніе точки x, y, z отъ начала координатъ.

Представимъ себѣ теперь, что точка x, y, z сферическаго пространства изображена въ такой точкѣ плоскаго пространства, что ея координаты будутъ:

$$X \quad \frac{Rx}{t}, \; Y \quad \frac{Ry}{t}, \; Z \quad \frac{Rz}{t}$$

$$X^2 \quad Y^2 \quad Z^2 \quad U^2 \quad \frac{R^2 \; \sigma^2}{t^2}$$

Тогда въ этомъ плоскомъ пространствѣ уравненія 3), принадлежащія кратчайшимъ линіямъ сферическаго пространства, будутъ уравненіями прямыхъ линій. Стало быть кратчайшія линіи сферическаго пространства изобразятся въ системѣ X, Y, Z прямыми линіями. Для очень малыхъ x, y, z найдемъ $t \quad R$ и

$$X \quad Y \quad Z$$

Итакъ, непосредственно близъ начала координатъ измѣренія въ обоихъ пространствахъ совпадаютъ. Съ другой стороны для разстояній отъ центра имѣемъ:

$$6)\ S_0 \quad R.\ arctg\left(+\ \frac{U}{R}\right)$$

Здѣсь U можетъ стать безконечнымъ, но каждая точка плоскаго пространства должна изобразить двѣ точки шара, одну, для которой $S_0 \quad \frac{1}{2} R\pi$, другую, для которой $S_0 > \frac{1}{2} R\pi$.

Растяженіе или удлиненіе въ направленіи U будетъ:

$$\frac{dS_0}{dU} \quad \frac{R^2}{R^2+U^2}$$

Чтобы найти соотвѣтственныя выраженія для псевдосферическаго пространства, достаточно взять R и t мнимыми, именно $R=R_1 i$ и $t \quad t_1 i$.

Тогда изъ 6):

$$tg \frac{S_0}{R_1 i} \quad + \frac{U}{R_1 i}$$

или, что тоже, преобразуя въ вещественную форму:

$$S_0 \quad \frac{1}{2} R_1 \log \frac{R_1+U}{R_1-U}$$

Здѣсь S_0 сохраняетъ вещественныя значенія лишь до тѣхъ поръ, пока $U<R_1$; для $U \quad R_1$ разстояніе S_0 становится въ псевдосферическомъ пространствѣ безконечно великимъ. Изображеніе въ плоскомъ пространствѣ наоборотъ содержится лишь въ шарѣ радіуса R_1 и каждая точка этого шара изображаетъ лишь одну точку безконечнаго псевдосфери-

ческаго пространства. Растяженіе въ направленіи U есть:

$$\frac{dS_0}{dU} \qquad \frac{R_1^2}{R_1^2 - U_1^2}$$

Но для линейныхъ элементовъ, которые направлены перпендикулярно къ U, для которыхъ стало быть t постоянно, имѣемъ въ обоихъ случаяхъ:

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{dX^2 + dU^2 + dZ^2}} \qquad \frac{t}{R} \qquad \frac{t_1}{R_1} = \frac{\sigma}{U} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

М. М. ФИЛИППОВЪ.

ФИЛОСОФІЯ ДѢЙСТВИТЕЛЬНОСТИ.

Изъ оглавленія: *Изъ I части.* Метафизика и наука. Древность. ...дніе вѣка. Новое время. Ламаркъ. Преформисты и эпигене...ки. Бэръ. Палеонтологія. Дарвинизмъ. Витализмъ. Рефлексъ, ...стинктъ, разумъ. Соціальная эволюція. Семья и собственность. ...огрессъ умственный и нравственный. Экономическій матеріа...змъ. О субъективномъ методѣ. Развитіе личности и учреж...ій. *Изъ II части.* Вещество и сила. Критика матеріализма, ...евращеніе энергіи. Энтропія. Начало наименьшаго дѣйствія. ... *III части.* Границы познанія. Позитивизмъ, агностицизмъ ...тицизмъ.

Подписная цѣна (большой томъ, роскошное изданіе въ ... стр. съ рис. и табл.) **пять** р. (съ перес. **шесть** р.) ... **выходѣ въ свѣтъ, цѣна будетъ увеличена.** ... вып. выйдетъ въ октябрѣ (печатается). Всего **4** выпуска.

Подписчики по желанію пользуются разсрочкой, при под...кѣ **три** рубля, затѣмъ по выходѣ втораго выпуска еще ...**и** рубля (съ пересылкой).

Книгопродавцамъ, доставляющимъ подписку, **уступка** ... **коп.** при чемъ пересылку, доставку и отвѣтственность пе...ъ подписчиками редакція принимаетъ на себя. Въ случаѣ ... если иногородній книжный магазинъ подписывается **на** ...**е имя,** уступка магазину 25% съ подписной цѣны.

Пересылка на счетъ заказчика.

Цѣна 30 коп. (съ перес. 35 коп).

Собранiе сочиненiй ГЕЛЬМГОЛЬЦА

издаваемое **М. М. Филипповымъ**

(редакторомъ „Научпаго Обозрѣнія").

Будетъ выходить выпусками цѣною отъ **30** до **50** коп. каждый (отъ 50 до 100 стр. въ каждомъ выпускѣ). Въ это собранiе войдутъ: **всѣ популярныя статьи ГЕЛЬМГОЛЬЦА, Всѣ его капитальныя работы по физiологiи чувствъ и избранные спецiальные мемуары.**